**10. Моменты случайных величин.**

**Числовые характеристики случайных величин**

**Определение.** Моментом *k*-го порядка (k = 1,2,3…) случайной величины называется

Для дискретной случайной величины

для непрерывной

Центральным моментом *k*-го порядка называется (обычные моменты иногда называют начальными).

**Упражнение 10.1.** Доказать формулу, связывающую начальные и центральные моменты:

В частности, ***дисперсия*** есть центральный момент второго порядка:

Обозначив математическое ожидание (первый момент) , преобразуем выражение для дисперсии:

таким образом, мы получили формулу, удобную для вычисления дисперсии:

(средний квадрат минус квадрат среднего).

**Пример 10.1.** Бинарная случайная величина. Пусть ; математическое ожидание такой случайной величины равно , поскольку имеет такое же распределение, что и , то , откуда

.

**Пример 10.2.** Геометрическое распределение: (см. параграф 7):

второе слагаемое здесь есть ранее уже вычисленное математическое ожидание геометрического распределения, . Первое слагаемое преобразуем к сумме геометрической прогрессии:

собирая найденные выражения, получаем,

**Упражнение 10.2.** Вычислить дисперсию биномиального распределения (используя свойства биномиальных коэффициентов, аналогично тому, как было сделано при вычислении математического ожидания, см. Параграф 8); вычислить дисперсию распределения Пуассона.

При линейном преобразовании

математическое ожидание ведет себя как линейная функция,

.

Как при этом изменяется дисперсия? Как легко видеть,

)

следовательно, дисперсия не зависит от сдвига *a* и она пропорциональна квадрату масштабного множителя *b*.

Часто будет применяться такой вариант линейного преобразования:

где называется ***среднеквадратичным отклонением***. Для этого преобразования, как легко проверить,

**Пример 10.3.** Найдем дисперсию для равномерного распределения на интервале [*a,b*] (см. параграф 7). Здесь пригодятся формулы, полученные для линейного преобразования. Пусть равномерно распределена на [0*,*1], тогда

равномерно распределена на [*a,b*] (см. Параграф 9). Как было показано ранее, , а дисперсию легко вычислить:

применяя формулы линейных преобразований, получаем,

**Упражнение 10.3.** Вычислить дисперсию для экспоненциального распределения.

Рассмотрим геометрический смысл дисперсии. Аналогично Примеру 8.5., возьмем дискретную случайную величину, принимающую два значения:

для нее

а дисперсия равна

.

Хорошо видно, что дисперсия измеряет разброс значений случайной величины. Точно так же можно пояснить и для непрерывного распределения: если математическое ожидание имеет смысл центра тяжести (см. Пример 8.5.), то физический аналог дисперсии – это момент инерции, чем больше удалены массы от центра тяжести, тем больше момент инерции.

**Утверждение 10.1.** Среднеквадратичный разброс значений случайной величины относительно ее математического ожидания меньше, чем среднеквадратичный разброс относительно любого другого значения: для любого *с* справедливо неравенство

.

Действительно, обозначая , запишем,

Существуют другие числовые характеристики, измеряющие различные свойства распределений: ***коэффициент асимметрии***

***коэффициент эксцесса***

здесь . Асимметрия измеряет несимметричность плотности распределения относительно среднего, а эксцесс – показатель островершинности плотности распределения (положителен для островершинных распределений, отрицателен для плосковершинных).

**Упражнение 10.4.** На рисунке показаны две плотности распределений, которые естественно назвать левосторонним и правосторонним треугольными распределениями.

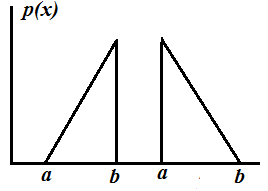


Рисунок. 10.1. Треугольные распределения

Уравнение плотности овпадает в данном случае с уравнением прямой, своим для гипотенузы каждого треугольника: . Необходимо найти коэффициенты для обеих плотностей (коэффициенты однозначно определяются параметрами ), вывести формулы для плотностей и функций распределения, вычислить математическое ожидание, дисперсию, асимметрию и эксцесс. Обратить внимание, как эти характеристики зависят от параметров .